Шәкір Айдос

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

e-mail: ajdossakir@gmail.com

8-лекция. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель лекции – изучение методов численного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В рамках курса студенты освоят метод конечных разностей и метод прогонки, приобретут навыки построения разностных схем, анализа их точности, устойчивости и сходимости, а также научатся применять эти методы для решения практических задач.

План лекции:

1 Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка ($n \geq 2$)

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{1.1}$$

Краевая задача для уравнения (1.1) заключается в следующем: найти решение $y = y(x)$ уравнения (1.1), для которого значения его производных

$$y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i), \quad (s = 0, 1, \ldots, \sigma_i)$$

в заданной системе точек $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k;\ k \geq 2)$ удовлетворяют n независимым между собой краевым условиям, в общем случае нелинейным:

$$V_\nu\big(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\sigma_1)}, \ldots, y_k, y_k', \ldots, y_k^{(\sigma_k)}\big) = 0, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.2}$$

Так как в силу уравнения (1.1) производные $y^{(s)}$ порядка n и выше могут быть в общем случае выражены через искомую функцию y и её младшие производные $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, то можно считать, что

$$\sigma_i \le n-1 \quad (i = 1, 2, \dots, k;\ \nu = 1, 2, \dots, n). \tag{1.3}$$

Краевая задача (1.1)–(1.2) часто встречается в приложениях. Приведём примеры конкретных краевых задач.

Пример 1. Простейшая двухточечная краевая задача. Найти функцию $y = y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1.4}$$

и принимающую при $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$ заданные значения

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Геометрически это означает, что требуется найти интегральную кривую дифференциального уравнения (1.4), проходящую через данные точки $M(a, A)$ и $N(b, B)$ (рисунок 1).

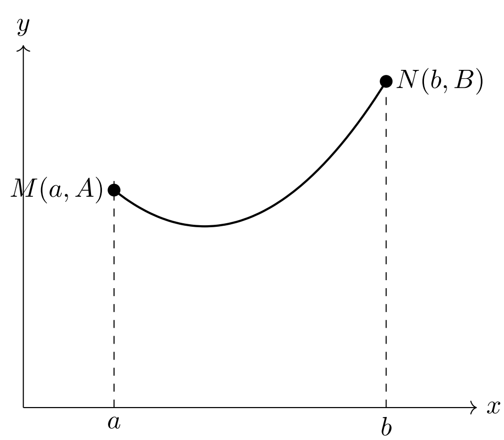


Рисунок 1

Пример 2. Видоизменением задачи, приведённой в примере 1, будет найти такое решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1.4), чтобы

$$y'(a) = A_1, \quad y'(b) = B_1.$$

Геометрически эта задача сводится к отысканию интегральной кривой уравнения (1.4), пересекающей прямые $x = a$ и $x = b$ под заданными соответственно углами α и β такими, что

$$\tan\alpha = A_1, \quad \tan\beta = B_1$$

(Рисунок 2).

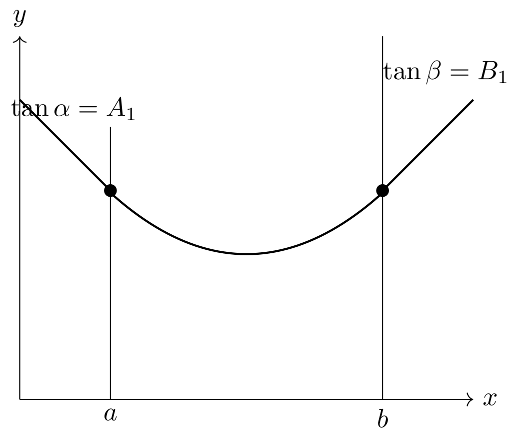


Рисунок 2

Пример 3. Можно рассмотреть также смешанную краевую задачу: найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1.4), удовлетворяющее условиям

$$y(a) = A, \quad y'(b) = B_1.$$

Иными словами, требуется найти интегральную кривую уравнения (1.4), проходящую через заданную точку $M(a, A)$ и пересекающую прямую $x = b$ под данным углом β, где

$$\tan\beta = B_1$$

(рисунок 3).

Заметим, что общая краевая задача (1.1)–(1.2) может:

(а) не иметь решений;

(б) иметь единственное решение;

(в) иметь несколько и даже бесконечно много решений.

Пример 4. Краевая задача

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0 \tag{5}$$

имеет бесконечно много решений вида

$$y = c\sin x,$$

где c — произвольная постоянная.

Краевая задача

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(b) = 1, \quad 0 < b < \pi$$

имеет единственное решение

$$y_b = \frac{\sin x}{\sin b},$$

а при $b = \pi$ совсем не имеет решений (рисунок 3).

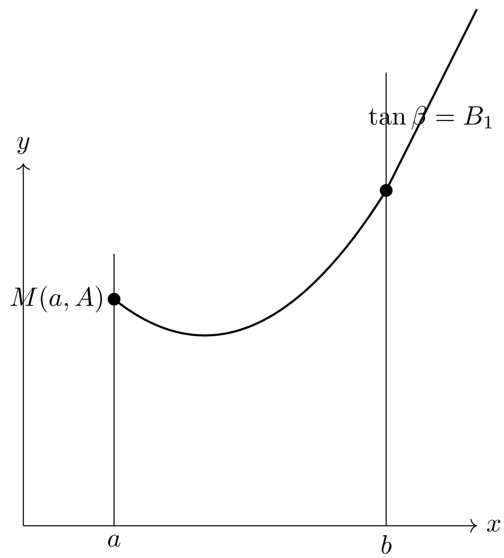


Рисунок 3

2 Метод конечных разностей

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{2.1}$$

с двухточечными линейными краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$(|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0),$$

где $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Одним из наиболее простых методов решения этой краевой задачи является сведение ее к системе конечно-разностных уравнений. Для этого разобьем основной отрезок $[a, b]$ на n равных частей длины

h (шаг), где

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Точки разбиения имеют абсциссы:

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

Значения в точках деления x_i искомой функции $y = y(x)$ и её производных $y' = y'(x)$, $y'' = y''(x)$ обозначим соответственно через

$$y_i = y(x_i), \quad y_i' = y'(x_i), \quad y_i'' = y''(x_i).$$

Введём также обозначения:

$$p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i).$$

Заменяя производные симметричными конечно-разностными отношениями для внутренних точек x_i отрезка $[a, b]$, будем иметь

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2.3}$$

Для конечных точек $x_0 = a$ и $x_n = b$, чтобы не выходить за пределы отрезка $[a, b]$, можно положить

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h}, \qquad y_n' = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \tag{2.4}$$

Однако если функция $y = y(x)$ достаточно гладкая, то более точные значения дают формулы

$$y_0' = \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}, \tag{2.5}$$

$$y_n' = \frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}, \quad n \geq 2. \tag{2.6}$$

Действительно, используя формулу Тейлора:

$$y_1 = y_0 + hy_0' + \frac{h^2}{2}y_0'' + \frac{h^3}{6}y_0''' + \cdots,$$

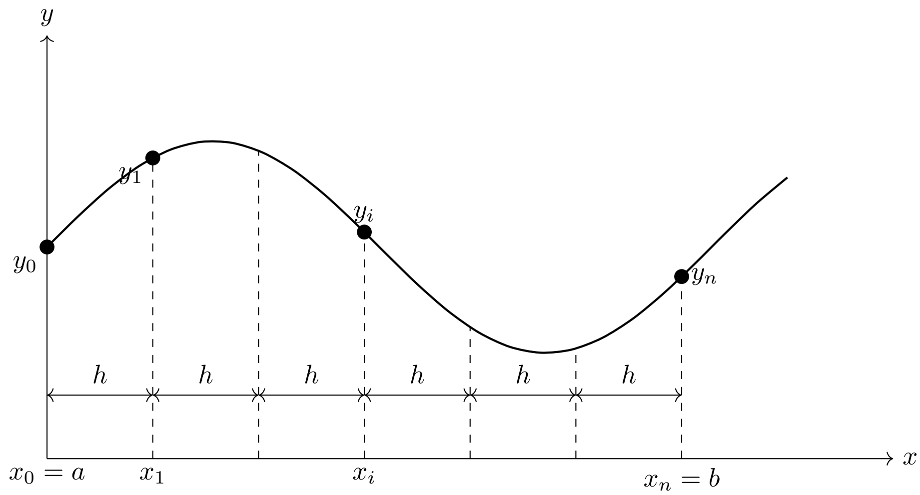
$$y_2 = y_0 + 2hy_0' + \frac{(2h)^2}{2}y_0'' + \frac{(2h)^3}{6}y_0''' + \cdots,$$

Отсюда

$$\frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = y_0' + O(h^2),$$

где $O(h^2)$ — величина порядка h^2. Аналогично

$$\frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = y_n' + O(h^2).$$



Во внутренних точках $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ приближенно можно заменить линейной системой уравнений:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{2.7}$$

Кроме того, в силу формул (2.5) и (2.6), краевые условия (2.2) дополнительно дают ещё два уравнения:

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 \dfrac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = A, \\ \beta_0 y_n + \beta_1 \dfrac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = B. \end{cases} \tag{2.8}$$

Таким образом получена линейная система $n+1$ уравнений с $n+1$ неизвестными $y_0, y_1, \ldots, y_n$, представляющими значения искомой функции $y = y(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Решив эту систему, получим табличные значения функции y.

Пример 1. Методом конечных разностей найти решение краевой задачи:

$$\begin{cases} y'' + (1 + x^2)y = -1, \\ y(-1) = y(1) = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Механически уравнение представляет собой дифференциальное уравнение для изгибающего момента некоторого бруса с переменным поперечным сечением и шарнирно закреплёнными концами.

Для грубого решения выберем шаг $h = \frac{1}{2}$. Полагая $x_2 = -1$, $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, ввиду симметрии будем иметь $y_{-2} = y_2 = 0$, $y_{-1} = y_1$. Таким образом, нужно определить лишь две ординаты y_0 и y_1. При $x = 0$:

$$\frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{(1/2)^2} + y_0 = -1, \quad \text{где } y_{-1} = y_1.$$

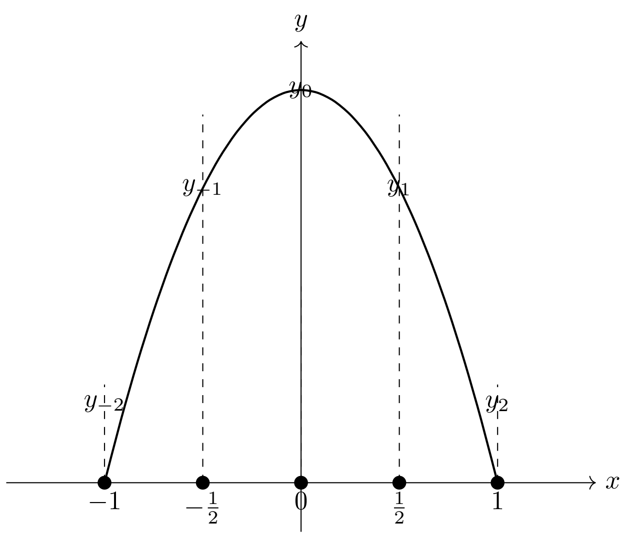
При $x = \frac{1}{2}$:

$$\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{(1/2)^2} + \left(1 + \frac{1}{4}\right) y_1 = -1.$$

С учётом $y_2 = 0$ получаем систему:

$$-7y_0 + 8y_1 = -1, \qquad 4y_0 - \frac{27}{4} y_1 = -1.$$

Откуда $y_0 \approx 0.967, \qquad y_1 \approx 0.721.$



3 Метод прогонки

При применении метода конечных разностей к краевым задачам для дифференциальных уравнений второго порядка получается «трёхчленная система» линейных алгебраических уравнений, каждое из которых содержит три соседних неизвестных. Для решения такой системы разработан специальный метод, получивший название метод прогонки.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{3.1}$$

с двухточечными линейными краевыми условиями

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= A, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= B, \end{aligned} \tag{3.2}$$

при предположении, что функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ непрерывны на $[a, b]$.

От дифференциального уравнения (3.1) обычным приёмом переходим к конечно-разностному уравнению. Для этого разобьём отрезок $[a, b]$ на n равных частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. Пусть

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

и введём обозначения:

$$p(x_i) = p_i, \quad q(x_i) = q_i, \quad f(x_i) = f_i, \quad y(x_i) = y_i.$$

Для внутренних точек x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, получаем систему конечно-разностных уравнений:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3.3}$$

После преобразований система имеет вид

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = h^2 f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{3.4}$$

где

$$m_i = -2 + q_i h^2, \quad n_i = 1 - \frac{p_i h}{2}, \quad 1 + \frac{p_i h}{2}.$$

Для производных на концах $x_0 = a$ и $x_n = b$ используем односторонние производные:

$$y_0' \approx \frac{y_1 - y_0}{h}, \quad y_n' \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

Тогда согласно граничным условиям (3.2) получаем:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_0 + \beta_1 \frac{y_1 - y_0}{h} &= A, \\ \alpha_2 y_n + \beta_2 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} &= B. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Линейная система (3.3), (3.5) состоит из $n+1$ уравнений первой степени относительно неизвестных $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Эту систему можно решить обычным способом. Однако мы сейчас укажем другой, более короткий путь, получивший название метода прогонки.

Разрешая уравнение (3.3) относительно y_i, будем иметь

$$y_i = \frac{\hat{f}_i}{m_i} h^2 - \frac{1}{m_i} y_{i+1} - \frac{n_i}{m_i} y_{i-1}. \tag{3.6}$$

Предположим, что с помощью полной системы (3.3), (3.5) из уравнения (3.6) исключена неизвестная y_{i-1}. Тогда это уравнение примет вид

$$y_i = c_i (d_i - y_{i+1}), \tag{3.7}$$

где c_i, d_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — некоторые коэффициенты. Отсюда

$$y_{i-1} = c_{i-1}(d_{i-1} - y_i).$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.3), получим

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i c_{i-1}(d_{i-1} - y_i) = \hat{f}_i h^2,$$

и, следовательно,

$$y_i = \frac{\hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1} - y_{i+1}}{m_i - n_i c_{i-1}}. \tag{3.8}$$

Сравнивая формулы (3.7) и (3.8), получим для определения c_i и d_i рекуррентные формулы:

$$c_i = \frac{1}{m_i - n_i c_{i-1}}, \quad d_i = \hat{f}_i h^2 - n_i c_{i-1} d_{i-1}, \quad (i = 1, \ldots, n-1). \tag{3.9}$$

Определим теперь c_0 и d_0. Из первого краевого условия (3.5) получаем

$$y_0 = \frac{Ah - \alpha_1 y_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}.$$

С другой стороны, из формулы (3.7) при $i = 0$ имеем

$$y_0 = c_0(d_0 - y_1). \tag{3.10}$$

Сравнивая последние два равенства, находим

$$c_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 h - \alpha_1}, \quad d_0 = \frac{Ah}{\alpha_1}. \tag{3.11}$$

На основании формул (3.9), (3.11) последовательно определяются коэффициенты c_i, d_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ до c_{n-1} и d_{n-1} включительно (прямой ход).

Обратный ход начинается с определения y_n. Используя второе краевое условие (3.5) и формулу (3.7) при $i = n-1$, получим систему двух уравнений:

$$\beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = B, \quad y_{n-1} = c_{n-1}(d_{n-1} - y_n). \tag{3.12}$$

Решая ее относительно y_n, будем иметь

$$y_n = \frac{Bh + \beta_1 c_{n-1} d_{n-1}}{\beta_0 h + \beta_1(c_{n-1} + 1)}. \tag{3.13}$$

Теперь по формуле (3.7) последовательно находим

$$y_{n-1},\ y_{n-2},\ y_{n-3},\ \ldots,\ y_0.$$

Для контроля можно проверить выполнение первого краевого условия. Вычисления удобно расположить в виде таблицы.

i	0	1	2	$\dots$	$n-1$	n
c_i	$c_0(11)$	c_1	c_2	$\dots$	c_{n-1}	
d_i	$d_0(11)$	d_1	d_2	$\dots$	d_{n-1}	
x_i	$x_0 = a$	x_1	x_2	$\dots$	x_{n-1}	$x_n = b$
y_i	y_0	y_1	y_2	$\dots$	y_{n-1}	$y_n(13)$

Для простейших краевых условий $y(a) = A$, $y(b) = B$ формулы для c_0, d_0, y_0 и y_n упрощаются. А именно, полагая

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0,$$

из формул (3.11) будем иметь:

$$c_0 = 0, \quad d_0 = \infty, \quad c_0 d_0 = A.$$

Отсюда

$$c_1 = \frac{1}{m_1}, \quad d_1 = \hat{f}_1 h^2 - n_1 A. \tag{3.14}$$

причем

$$y_n = B, \quad y_0 = A. \tag{3.15}$$

Заметим, что метод прогонки обладает устойчивым вычислительным алгоритмом, т.е. ошибки округления не вызывают неограниченного возрастания погрешности решения.

Пример 1. Методом прогонки решить краевую задачу

$$y'' = x + y, \tag{3.16}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \tag{3.17}$$

Решение. Примем $h = 0{,}1$ и от уравнения (3.16) и краевых условий (3.17) перейдем к соответствующим конечно-разностным уравнениям:

$$y_{i+1} + m_i y_i + n_i y_{i-1} = \hat{f}_i h^2, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad y_0 = 0,\ y_{10} = 0.$$

где $m_i = -2 - h^2, \quad n_i = 1, \quad f_i = x_i = ih$. Согласно формулам (3.14) имеем $c_1 = -0{,}498, \quad d_1 = 0{,}001$. Формулы (3.9) в нашем случае дают:

$$c_i = \frac{1}{-2 - h^2 - c_{i-1}}, \quad d_i = ih^3 - c_{i-1} d_{i-1}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Найденные значения c_i и d_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ записываем в первых двух строках таблицы 1. Затем, используя формулу (3.7) и известное значение $y_{10} = 0$, вычисляем $y_9, y_8, \ldots, y_1$.

Для сравнения в последней строке таблицы 1 даны значения точного решения

$$\tilde{y} = \frac{2e}{e^2 - 1} \sinh x - x.$$

Таблица 1

Решение краевой задачи (3.16)–(3.17) *методом прогонки*

i	0	1	2	3	4	5
c_i	0	−0,498	−0,662	−0,878	−0,890	−0,900
d_i		0,001	0,002	0,004	0,008	0,012
y_i	0	−0,025	−0,049	−0,072	−0,078	−0,081
$\tilde{y}_i$	0	−0,015	−0,029	−0,041	−0,050	−0,057

Продолжение таблицы 1

i	6	7	8	9	10
c_i	−0,908	−0,915	−0,921	−0,926	
d_i	0,016	0,022	0,028	0,035	
y_i	−0,078	−0,070	−0,055	−0,032	0
$\tilde{y}_i$	−0,058	−0,054	−0,044	−0,026	0

4 Контрольные вопросы

1. Что такое краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка? Приведите пример.
2. В чём заключается метод конечных разностей для решения краевых задач?
3. Как строится разностная аппроксимация второй производной?
4. Какие типы граничных условий существуют и как они учитываются в разностных схемах?
5. Опишите алгоритм метода прогонки (метод трёхдиагональной матрицы) для решения линейных краевых задач.
6. Что понимается под устойчивостью разностной схемы и как её проверить?

5 Список литературы

Для получения дополнительных и более полных сведений студентам рекомендуется обратиться к литературе [1–8].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Collatz, C. 1953. Chislennye Metody Resheniya Differentsial'nykh Uravneniy. Moscow: IL, Chapter II.

[2] Milne, W. E. 1955. Chislennoye Resheniye Differentsial'nykh Uravneniy. Moscow: IL, Chapter VII.

[3] Elsgolts, L. E. 1954. Variatsionnoe Ischislenie. Moscow: Gostekhizdat.

[4] Mikhlin, S. G. 1957. Variatsionnye Metody v Matematicheskoy Fizike. Moscow: Gostekhizdat, Chapters III, V, IX.

[5] Tolstov, G. P. 1960. Ryady Fur'e. 2nd ed. Moscow: Fizmatgiz, Chapter II.

[6] Polozhiy, G. N., et al. 1960. Matematicheskiy Praktikum. Moscow: Fizmatgiz.

[7] Lokutsievsky, O. V. 1956. "Uspekhi Matematicheskikh Nauk." 11, no. 3 (69).

[8] Lance, J. N. 1962. Chislennye Metody dlya Byistrodeystvuyushchikh Vycheslitel'nykh Mashin. Moscow: IL.